4M

УДК 51(071)

Л.П. Мироненко, И.В. Петренко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Стандартные пределы и метод неопределенных коэффициентов

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko
Donetsk National Technical University
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

The Standard Limits and the Method of Undefined Coefficients

Л.П. Мироненко, І.В. Петренко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Стандартні границі і метод невизначених коефіцієнтів

Целью статьи является альтернативный подход вычисления стандартных пределов в теории пределов. Подход основан на использовании метода неопределенных коэффициентов, который применяется к тригонометрическим и гиперболическим соотношениям. В результате получены не только стандартные пределы, но и стандартные разложения известных функций $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$ по степеням x без привлечения дифференциального исчисления.
Ключевые слова: предел, стандартные пределы, функция, синус, косинус, экспонента, метод, неопределенные коэффициенты.

The purpose of the paper is an alternative approach to calculation of the standard limits in the theory of limits. The approach is based on the appliance of the method of indefinite coefficients. This method is applied to trigonometric and hyperbolic identities. In the result, the standard limits were obtained by the methods of elementary mathematics. Besides, the theory gives standard polynomial representations for the functions $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$ without using differential calculus.
Key Words: limit, standard limits, function, sine, cosine, exponential, method, indefinite coefficients.

.
Метою статті є альтернативний підхід обчислення стандартних границь в теорії границь. Підхід використовує метод невизначених коефіцієнтів. Метод застосовано до тригонометричних і гіперболічних співвідношень. В результаті отримано не тільки стандартні границі, але й стандартні розклади функцій $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$ по степенях x без залучення диференціального числення.
Ключові слова: границя, стандартні границі, функція, синус, косинус, експонента, метод, невизначені коефіцієнти.

Введение

Стандартные пределы в математическом анализе, также известные под названиями первого и второго замечательных пределов, используются в основном для вывода производных функций $\sin x, \cos x, e^x, a^x$ и составляют основу стандартной таблицы производных [1-4]. Стандартные пределы представляют самостоятельный интерес (практическое вычисление ряда пределов, оценка сходимости числовых и степенных рядов), а также являются вспомогательным теоретическим материалом для обоснования некоторых производных в дифференциальном исчислении [5], [6].

Специфический вывод формул стандартных пределов (первый стандартный предел основан на предельном переходе в геометрических построениях, а второй – на основе бинома Ньютона) не носит универсального характера [1], [2]. Более органично «вписывается» в курс теории пределов подход на основе теории многочленов. Кроме того, будет показано, что приближения многочленами элементарных функций можно получить методами элементарной математики, без привлечения аппарата дифференциального исчисления.

Стандартные ряды некоторых элементарных функций получают, используя формулу Тейлора (формулу Маклорена), но, оказывается, без строгого обоснования можно их получить, не выходя за рамки элементарной математики, и, тем самым, легко вывести формулы стандартных пределов.

1 Первый стандартный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Запишем функцию синус в виде приближения многочленом n-й степени с неизвестными (неопределенными) действительными коэффициентами $A_o, A_1, ..., A_n$.

$$\sin x = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_n x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – остаток разложения, многочлен степени не ниже x^{n+1}.

Учитывая, что функция синус нечетная $\sin(-x) = -\sin x$ и $\sin 0 = 0$, получим многочлен, содержащий только нечетные степени переменной x и $A_o = 0$

$$\sin x = A_1 x + A_3 x^3 + ... + A_{2n+1} x^{2n+1} + r_{2n+1}(x), \tag{1}$$

где $r_{2n+1}(x)$ – остаток разложения, многочлен степени не ниже x^{2n+3}.

Аналогично, учитывая, что функция косинус четная $\cos(-x) = \cos x$ и $\cos 0 = 1$, получим многочлен, содержащий только четные степени x и $B_o = 1$

$$\cos x = 1 + B_2 x^2 + ... + B_{2n} x^{2n} + r_{2n}(x), \tag{2}$$

где $r_{2n}(x)$ – остаток разложения.

Замечание 1. В формулах (1) и (2) остатки разложений обозначены одним символом $r(x)$, хотя все они различны [3]. Нас не будет интересовать явный вид функций $r(x)$, поскольку целью является предельный переход $x \to 0$, в таком случае $r_n(x)$ является бесконечно малой порядка $n+1$ [4].

В дальнейшем, в других разложениях, остаток будем обозначать одним символом $r(x)$, учитывая сделанное замечание. Индексом n будем обозначать наименьшую степень многочлена, представляющего остаток разложения.

Для нахождения коэффициентов A, B используем метод неопределенных коэффициентов [2], [3], который применим к основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. При этом выпишем только несколько первых членов, количество которых достаточно, чтобы получить закономерность.

$$\sin^2 x = (A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + A_7 x^7 + ... + A_{2n+1} x^{2n+1} + r_{2n+3}(x))^2 =$$
$$= A_1^2 x^2 + A_3^2 x^6 + 2A_1 A_3 x^4 + 2A_1 A_5 x^6 + 2(A_3 A_5 + A_1 A_7) x^8 + ...),$$

$$\cos^2 x = (1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + ... + B_{2n} x^{2n} + r_{2n+2}(x))^2 =$$
$$= (1 + B_2^2 x^4 + B_4^2 x^8 + 2(B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + B_8 x^8 + B_2 B_4 x^6 + B_2 B_6 x^8) + ...$$

Складываем левые и правые части равенств, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях, получим тождество, которое должно выполняться при всех x

$$1 + (A_1^2 + 2B_2)x^2 + (2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2)x^4 + (2A_1 A_5 + + A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4)x^6 +$$
$$+ (2A_3 A_5 + 2A_1 A_7 + 2B_2 B_6 + B_4^2 + 2B_8)x^8 + ... \equiv 1.$$

Как известно, функции $1, x, x^2, ..., x^n$ являются линейно независимыми на всей действительной оси, поэтому приравнивая каждую скобку нулю (коэффициент при соответствующей степени x), получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B

$$\begin{cases} A_1^2 + 2B_2 = 0, \\ 2A_1 A_3 + B_2^2 = 0, \\ A_3^2 + 2A_1 A_5 + 2B_2 B_4 = 0, \\ A_4^2 + A_1 A_4 + B_4^2 + B_2 B_6 = 0, \\ ... \end{cases} \quad (3)$$

Эта система уравнений для определения коэффициентов A, B не является определенной, поскольку неизвестных больше числа уравнений. Используем известное тригонометрическое равенство $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ (можно использовать любое иное тригонометрическое равенство, например, $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$). Тогда

$$1 + (-A_1^2 + 2B_2)x^2 + (-2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2)x^4 + (-2A_1 A_5 - A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4)x^6 +$$
$$+ (-2A_3 A2_5 - 2A_1 A_7 + 2B_2 B_6 + B_4^2 + 2B_8)x^8 + ... =$$
$$= 1 + 4B_2 x^2 + 16B_4 x^4 + 64B_6 x^6 + 256B_8 x^8 + ...$$

В результате получим еще одну систему

$$\begin{cases} -A_1^2 + 2B_2 = 4B_2, \\ -2A_1 A_3 + B_2^2 = 16B_4, \\ -A_3^2 - 2A_1 A_5 + 2B_2 B_4 = 64B_6, \\ -A_4^2 - A_1 A_4 + B_4^2 + B_2 B_6 = 256B_8, \\ ... \end{cases} \quad (4)$$

Решение систем (3) и (4) проведем последовательно, образуя пары уравнений

$$\begin{cases} A_1^2 + 2B_2 = 0 \\ -A_1^2 + 2B_2 = 4B_2 \end{cases} \to B_2 = -\frac{A_1^2}{2!}.$$

$$\begin{cases} 2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2 = 0 \\ -2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2 = 16B_4 \end{cases} \to A_3 = -\frac{A_1^3}{3!}, B_4 = \frac{A_1^4}{4!}.$$

$$\begin{cases} 2A_1 A_5 + A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4 = 0 \\ -2A_1 A_5 - A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4 = 64B_6 \end{cases} \to A_5 = \frac{A_1^5}{5!}, B_6 = -\frac{A_1^6}{6!}.$$

и т.д.

В результате имеем следующие разложения

$$\sin x = A_1 x - \frac{A_1^3}{3!}x^3 + \frac{A_1^5}{5!}x^5 - ... + (-1)^n \frac{A_1^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+3}(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{A_1^2}{2!}x^2 + \frac{A_1^4}{4!}x^4 - ... + (-1)^n \frac{A_1^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n+2}(x). \quad (5)$$

Замечание 2. Разложения (5) определены с точностью до произвольного коэффициента A_1. Это объясняется тем, что использованы равенства $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\cos^2 x - \sin^2 x + = \cos 2x$, однородные относительно аргумента *x*, а именно, соотношения $\sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha x = 1$ и $\cos^2 \alpha x - \sin^2 \alpha x + = \cos 2\alpha x$ остаются справедливыми для любых $\alpha \neq \infty$.

Коэффициент A_1 можно рассматривать как параметр, обозначим его α. Теперь заметим, что при различных значениях параметра правая часть равенств (5) является функцией не переменной x, а переменной αx. Поэтому в разложениях (5) следует заменить $\sin x \to \sin(\alpha x),\ \cos x \to \cos(\alpha x)$, и окончательно разложения имеют вид

$$\sin(\alpha x) = \alpha x - \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{(\alpha x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+3}(\alpha x),$$
$$\cos(\alpha x) = 1 - \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{(\alpha x)^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+2}(\alpha x). \quad (6)$$

Замечание 3. Коэффициент A_1 можно установить иначе, для этого достаточно в разложения (5) подставить какое-либо из известных значений функций $\sin x$ и/или $\cos x$.

При $\alpha = 1$ имеем стандартные формулы Маклорена

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x), \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x). \quad (7)$$

Имея формулу для синуса (6), нетрудно получить формулу первого стандартного предела. Для этого разделим выражение (6) на *x* и перейдем к пределу при $x \to 0$. В результате имеем [1]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha . \quad (8)$$

Эта формула является обобщением первого стандартного предела, который в литературе обычно записывают при $\alpha = 1$.

При вычислении предела (8) использован предел $\lim_{x\to 0} \frac{r_{2n+3}(x)}{x} = 0$, значение которого очевидно, если учесть, что согласно логике разложения (1) остаток $r_{2n+3}(x)$ является бесконечно малой порядка x^{2n+3} при $x \to 0$.

2 Второй стандартный предел $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/x} = e$

Аналогичный рассмотренному в предыдущем пункте подход можно применить к функции $y = e^x$. Для этого рассмотрим гиперболические функции shx и chx, которые определяются равенствами [1]

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ и } shx + chx = e^x. \qquad (9)$$

Гиперболический синус является нечетной функцией, а гиперболический косинус – четной. Поэтому разложения функций shx и chx имеют аналогичный формам (1) и (2) вид

$$shx = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n+1} x^{n+1} + r_{2n+3}(x),$$
$$chx = 1 + B_2 x^2 + \ldots + B_{2n} x^{2n} + r_{2n+2}(x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B используем равенства $ch^2 x - sh^2 x = 1$ и $ch^2 x + sh^2 x = ch2x$ (можно использовать равенство $2chx \cdot shx = sh2x$)

$$shx = A_1 x + \frac{A_1^3}{3!} x^3 + \frac{A_1^5}{5!} x^5 \ldots + \frac{A_1^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + r_{2n+3}(x),$$
$$chx = 1 + \frac{A_1^2}{2!} x^2 + \frac{A_1^4}{4!} x^4 \ldots + \frac{A_1^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + r_{2n+2}(x).$$

Искомое разложение имеет вид

$$e^x = shx + chx = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{2!} x^2 + \frac{A_1^3}{3!} x^3 \ldots + \frac{A_1^n}{n!} x^n + r_{n+1}(x), \qquad (10)$$

Как в случае синуса и косинуса, обозначим коэффициент $A_1 = \alpha$. Как и в предыдущем пункте, имеют место *замечания* 2 и 3 относительно параметра α. Поэтому разложение для экспоненты имеет вид

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \ldots. + \frac{(\alpha x)^n}{n!} + r_{n+1}(\alpha x). \qquad (11)$$

Отсюда видно, что при $\alpha = 0$ имеем $\left. e^{\alpha x} \right|_{\alpha = 0} = 1$, при $\alpha = 1$ – формула Маклорена для функции e^x

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x). \qquad (12)$$

Отметим еще один случай при $\alpha = \ln a$, получим известное разложение

$$a^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ln^k a + r_{n+1}(x).$$

Замечание 4. Коэффициент A_1 можно установить иначе, для этого достаточно в разложение (11) подставить какое-либо из известных значений функций e^x, например, при $x = 1$ имеем известное число $e \approx 2{,}7182818285\ldots$ Полагая в (11) $x = 1$, получим $A_1 = 1$. В результате получим разложение функции e^x в визе (12).

При малых значениях x имеем приближенное равенство $e^x \cong 1 + x$, из которого следует второй стандартный предел при $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{1/\alpha x} = e,\ \alpha \neq 0. \qquad (13)$$

Эта формула является обобщенной второго стандартного предела, который в литературе обычно записывают при $\alpha = 1$ [1]

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Общепринятая форма записи второго стандартного предела достигается заменой $y = 1/x$ при $y \to \infty$. В результате имеем

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/x} = e. \qquad (14)$$

3 Несколько замечаний относительно оценки остаточных членов разложений

Оценку остатка $r_n(x)$ легко получить и обосновать в рамках теории Тейлора, опираясь на аппарат дифференциального исчисления [1], [2], [5]. В нашей работе представление функций многочленами получены без привлечения понятия производной, т.е. в рамках элементарной математики. В этом ценность работы.

Что касается вопроса оценки остаточных членов разложений, то для обоснования стандартных пределов нет в этом необходимости, поскольку рассматриваются малые значения x, а в конечном счете, выполняется предельный переход $x \to 0$ [6].

Выводы

1) Стандартные пределы получены в рамках элементарной математики, без привлечения аппарата дифференциального исчисления.

2) Стандартные пределы получены с использованием только метода неопределенных коэффициентов.

3) Результаты работы выходят за рамки поставленной задачи, поскольку метод неопределенных коэффициентов приводит к стандартным приближениям многочленами функций $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$.

4) Результаты работы легко обобщаются на все известные стандартные разложения, например, кроме перечисленных выше функций, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и могут быть получены в рамках элементарной математики.

5) Приближение основных элементарных функций многочленами на этапе изучения теории пределов значительно упрощает вывод ряда математических положений, в том числе облегчает вычисление пределов.

6) В процессе вывода активно используется метод неопределенных коэффициентов, что будет полезным при интегрировании рациональных дробей.

7) Полученные результаты работы остаются ценными и могут быть использованы творчески, например, для вывода первого и второго стандартных пределов, демонстрации того, что стандартные пределы являются следствиями степенных разложений функций, для сравнения бесконечно малых величин, наконец, для изучения метода неопределенных коэффициентов.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука, 1970. – Том I. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – Москва : Изд. ФМЛ, 1956. – Том 1. – 472 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, «ФМЛ», 1972. – Том 1. – 795 с.
4. Гурса Э. Курс математического анализа / Гурса Э. – Москва : Государственное технико-творческое издательство, 1933. – Том 1. – 368 с
5. Шведов И.А. Компактный курс анализа / Шведов И.А. – Новосибирск, 2003. – Т. 1. – 113 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики / Смирнов В.И. – Москва : Наука, 1974. – Т. 1. – 479 с.

Literatura

1. Kudryavtsev L.D. Matematicheskij analiz. Tom 1. Nauka. 1970. 571 s.
2. Iliyn V.A. Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1. M.: Izd-vo FML. Moskwa. 1956. 472 s.
3. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo isccisleniya. Tom 1. M.: Izd-vo FML. Moskwa. 1972. 795 s.
4. Gursa E. Kurs matematicheskogo analiza, tom 1. Gosudarstvenoe techniko-tvorcheskoe izdatelstvo. Moskwa. 1933. 368 s.
5. Shvedov I.A. Kompaktnyj kurs analiza. Tom 1. Novosibirsk. 2003. 113 s.
6. Smirnov V.I. Kurs vysshej matematiki.Tom 1. Nauka: Moskva. 1974. 479 s.

RESUME

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko

The Standard Limits and the Method of Indefinite Coefficients

The purpose of the paper is an alternative approach for a calculation of the standard limits in the theory of limits. The approach uses the method of indefinite coefficients. This method is applied to trigonometric and hyperbolic identities. In the result, the standard limits were obtained by the methods of elementary mathematics. Besides, the theory gives standard polynomial representations for the functions $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$ without using differential calculus.

We will find the functions $\sin x$ and $\cos x$ in a form of polynomial expansions with indefinite coefficients A and B

$$\begin{aligned} \sin x &= A_1 x + A_3 x^3 + ... + A_{2n+1} x^{2n+1} + r_{2n+1}(x), \\ \cos x &= 1 + B_2 x^2 + ... + B_{2n} x^{2n} + r_{2n+2}(x). \end{aligned} \qquad (1)$$

Where the rest (error) $r_n(x)$ of each of the expansion is polynomial of x^n of a degree not less then n. In the expansions, it was taken into account the properties of a symmetry of the functions $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ and the values $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

The next step is to find indefinite coefficients A, B. For this, it is suitable to apply the method of indefinite coefficients [1-2] to the identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Substituting the expressions (1) into the identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. After this comparing the coefficients at the same degrees of x, we come to a system of the equations (2)

$$\begin{cases} A_1^2 + 2B_2 = 0, \\ 2A_1 A_3 + B_2^2 = 0, \\ A_3^2 + 2A_1 A_5 + 2B_2 B_4 = 0, \\ A_4^2 + A_1 A_4 + B_4^2 + B_2 B_6 = 0, \\ ... \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} -A_1^2 + 2B_2 = 4B_2, \\ -2A_1 A_3 + B_2^2 = 16B_4, \\ -A_3^2 - 2A_1 A_5 + 2B_2 B_4 = 64B_6, \\ -A_4^2 - A_1 A_4 + B_4^2 + B_2 B_6 = 256B_8, \\ ... \end{cases} \quad (3)$$

The system (2) is not complete. Unknowns are more than the equations. Therefore we need to use another trigonometrical identity for the functions $\sin x$ and $\cos x$, for example, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ (it may be used $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ and so on). In the result, we have the second system of the equations (3)

The solution of the systems (2) and (3) comes to the next expansions

$$\sin \alpha x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(\alpha x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(\alpha x), \quad \cos \alpha x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(\alpha x)^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(\alpha x). \qquad (4)$$

Where $\alpha = A_1$ is a parameter. The standard expansions will be at $\alpha = 1$.

Using the identities $ch^2 x - sh^2 x = 1$ and $ch^2 x + sh^2 x = ch2x$ we easily find the similar expansions for the hyperbolic functions shx, chx and for the exponential function e^x

$$e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha x)^k}{k!} + r_{n+1}(\alpha x).). \qquad (5)$$

Thus, we have two problems solved.

1. The standard expansions for the functions $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$ are obtained without using of the differential calculus.

2. Applying the expansions for $\sin x$ (4) and e^x (5) we may get the well-known standard limits $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha$.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.